571. Lie ノ第二基本定理ニ関聯シタ一ツノ問題

吉田　耕作（阪大）

複素數体ノ上ノ n 次ノ行列 $A=\|a_{ij}\|$ ノ作ル ring ヲ R トスル。

絶對値 $|A|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ニヨツテ R ニ topology ガ導入サレル。R ノ部分集合 $\mathfrak{G}$ ガ matrix 乘法ニ對シテ群ヲ作ルトキ，$\mathfrak{G}$ ハ上ノ topology ニヨツテ topological group ニナル。$\mathfrak{G}$ ガ次ノ條件ヲ滿足スルトキニ Lie 群ト呼ブコトニスル。

1) 實數ヲ係數トシテ一次独立ナ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m (\in R)$ ガ存在シ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) \in \mathfrak{G}, \quad t \text{ real}$$

2) 充分小サナ正數 ε ヲトレバ，$|A-E| \leqq \varepsilon$.（E ハ R ノ単位行列），$A \in \mathfrak{G}$ ナル A ハ uniquely ニ

$$A=\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right), \quad t \text{ real}.$$

ト表ハサレル。

但シ $\exp(X)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{X^i}{i!}$

然ラバ $\mathfrak{G}$ ガ Lie 群ナルタメノ必充條件ハ $\mathfrak{G}$ ガ locally compactナコトデアル。（本紙談話　　参照，但シdiscrete groupヲモLie群ト呼ブコトニスル）

$\mathfrak{G}$がLie群ナラバ，$\sum_{i=1}^{m} t_i X_i$，t real，ナル形ノelement全体$\mathfrak{J}$ハ次ノ條件ヲ満足スル。

(α)　$\mathfrak{J}$ハreal linear spaceデ有限ナbase（with real coefficients）ヲ有スル。即チ$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m$。

(β)　$[X, Y] = XY - YX$ハX, Yト共ニ$\mathfrak{J}$ニ属スル。

此ノ$\mathfrak{J}$ヲLie群$\mathfrak{G}$ノLie ringト呼ブ。二ツノring operationsハvector-additionトcommutator-multiplication $[X, Y]$デアル。$\mathfrak{J}$ハ$\lim_{i\to\infty}(A_i - E)/\varepsilon_i$（$A_i \in \mathfrak{G}$，$\varepsilon_i$ real且ツ$A_i \neq E$, $\varepsilon_i \neq 0$, $\lim_{i\to\infty} A_i = E$, $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$）ニ依ッテ定義サルル如キ$\mathfrak{G}$ノ$E$ニ於ケル微分商ノ集合デアル（本紙談話　　　）。

今逆ニ(α)及ビ(β)ヲ満足スルRノsubset $\mathfrak{J}$ガaprioriニ與ヘラレタトキ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) \quad \left(t \text{ real 且 } \sum_{i=1}^{m} |t_i| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\right)$$

ナル形ノRノelement全体ノ集合ヲ$\overline{\mathfrak{G}}$トスレバ$\overline{\mathfrak{G}}$ハ所謂Lie群芽デアル。即チ$X, Y \in \overline{\mathfrak{G}}$ガ充分$E$ニ近ケレバ$X^{-1}$及ビ$XY \in \overline{\mathfrak{G}}$。

之レガLieノ第二基本定理デアル。ソコデ$\overline{\mathfrak{G}}$ノ要素有限個ノ積及ビ斯ル積ノlimes（但シnon-singular

ナモノトミル）全体 $\tilde{\mathfrak{G}}$ ヲ考ヘルト，明ニ $\tilde{\mathfrak{G}}$ ハ locally compact ニナルカラ Lie 群デアル。$\tilde{\mathfrak{G}}$ ノ Lie ring ヲ $\tilde{\mathfrak{I}}$ トスレバ $\tilde{\mathfrak{I}} \supseteqq \bar{\mathfrak{I}}$ デアル。然シ $\tilde{\mathfrak{I}} = \bar{\mathfrak{I}}$ ニナルカドウカハワカラナイ。実際 $\tilde{\mathfrak{I}}$ ガ $\bar{\mathfrak{I}}$ ヨリモ大キクナル example トシテ

$$\bar{\mathfrak{I}} \text{ ノ base} = \begin{Vmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \tau\sqrt{-1} \end{Vmatrix}, \quad \tau \text{ irrational}$$

ガ掲ゲラレル。故ニ

Lie 群芽 $\bar{\mathfrak{G}}$ ハ Lie 群 $\tilde{\mathfrak{G}}$ ノ単位要素 E ノ近傍ニハナラナイ。

ヨッテ $\bar{\mathfrak{I}} = \tilde{\mathfrak{I}}$ トナルタメノ條件ヲ求メルコトガ問題ニナル。上ニ見タ如ク，classical ナ Lie ノ理論デハ之レニ答ヘテハヲラナイノデアル。本談話ニ於テハ次ノ定理ヲ述ベタイ。

定理. $\bar{\mathfrak{I}}$ ガ irreducible ナラバ Lie 群芽 $\bar{\mathfrak{G}}$ ハ Lie 群 $\tilde{\mathfrak{G}}$ ノ単位ノ近傍ニナル。

コヽニ $\bar{\mathfrak{I}}$ ガ irreducible ト云フノハ $\bar{\mathfrak{I}}$ ノ要素ガ全テ同時ニハ

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{Vmatrix}$$

ノ形ニハ transform デキナイコトヲ云フノデアル。以下其ノ証明。

Lemma 1. $\bar{\mathfrak{G}}$ ハ $\tilde{\mathfrak{G}}$ ノ Lie 不変部分群芽デアル。即チ任意ノ $B \in \tilde{\mathfrak{G}}$ ニ對シテ $A \in \bar{\mathfrak{G}}$ ガ充分Eニ近ケレバ

$$BAB^{-1} \in \overline{\mathfrak{g}}$$

証明. $A = \exp(X)$, $X \in \overline{\mathfrak{I}}$ トスレバ $BAB^{-1} = \exp(BXB^{-1})$ デアリ X ト共ニ BXB^{-1} ハ O ニ收斂スルカラ

$$X \text{ ト共ニ } BXB^{-1} \in \overline{\mathfrak{I}}$$

ガ証明サレレバヨイ。所ガ之レハ $B \in \overline{\mathfrak{g}}$ ノトキハ明カデアル。何者, コノトキハ変換 $X \to BXB^{-1}$ ハ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ linear adjoint Lie 群芽デ induzieren サレルカラ。$B \in \widehat{\mathfrak{g}}$ ナル一般ノ場合ハコノ special case カラ limit process ニヨツテ得ラレル。

Lemma 2. (E. Cartan ノ定理——例ヘバ H. Freudenthal, Ann. of Math. 37, 1936, p. 64——ヲ見ラレタシ)。$\widehat{\mathfrak{g}}$ ハ irreducible ナ Lie 群デアルカ $\widehat{\mathfrak{g}}$ ノ単位ノ近傍ハ semi-simple ナ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{g}}_1$ ト可換ナ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{g}}_2$ トノ直積ニナル。コヽニ $\overline{\mathfrak{g}}_1$ ノ行列ハ全テ determinant 1 又 $\overline{\mathfrak{g}}_2$ ノ行列ハ全テ αE (α 複素数) ノ形デアル.

Lemma 2'. $\overline{\mathfrak{I}}$ ガ irreducible ナルノミナラズ $\mathrm{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{I}}$ ナラバ $\widehat{\mathfrak{g}}$ ハ semi-simple ナ Lie 群デアル。

証明. コノトキ $\overline{\mathfrak{g}}$ 從ツテ $\widehat{\mathfrak{g}}$ ノ行列ハ全テ determinant 1 ニナル (良ク知ラレタ公式 $\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{trace}(X))$ ニヨレ)。

上ノ條件 $\mathrm{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{I}}$ ハ $\overline{\mathfrak{I}}$ ガ semi-simple ナ ring ナラ確ニ満足サレル。何者、semi-simple ナ

Lie ring $\overline{\mathfrak{J}}$ ハソノ commutatorring ト一致スル。即チ $\overline{\mathfrak{J}}$ ノ任意ノ element ハ $[X, Y]$, X 及ビ $Y \in \overline{\mathfrak{J}}$, ノ形ニ表ハサレルカラ (例ヘバ H. Freudenthal, 前出参照)。

<u>定理ノ証明</u>. Lemma 1 ニヨレバ $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ ideal デアル。即チ $X \in \overline{\mathfrak{J}}$, $Y \in \widetilde{\mathfrak{J}}$ ナラバ $[X, Y] \in \overline{\mathfrak{J}}$. 先ヅ $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ direct summand ナルコトヲ示サウ。

Lemma 2 ニヨレバ Lie ring $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ハ semi-simple ナ Lie ring $\overline{\mathfrak{J}}_1$ (of the Lie group germ $\overline{\mathfrak{G}}_1$) ト可換ナ Lie ring $\overline{\mathfrak{J}}_2$ (of the Lie group germ $\overline{\mathfrak{G}}_2$) トノ直和ニナル。$\overline{\mathfrak{J}}_1$ ハ semi-simple ダカラ Cartan ノ基本定理ニヨリ, simple 且ツ semi-simple ナ ideal ノ直和ニナル。又 $\overline{\mathfrak{J}}_2$ ノ基ハ

i) αE, α ハ複素数 ($=0$, 若シ $\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$ ナラバ)

又ハ

ii) E 及ビ $\sqrt{-1}\,E$

ヨリ成ル。ヨッテ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ハ単純 ideal ノ直和ニナル, 従ッテ ideal $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ direct summand デアル。

次ニ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_1$ ヲ示サウ。若シ然ラズトスレバ $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ ideal ダカラ $\overline{\mathfrak{J}}_1 \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_1'$ ナル semi-simple ナ ideal $\overline{\mathfrak{J}}_1'$ ガ存在シナケレバナラナイ。$\widetilde{\mathfrak{J}}$ ハ単純 ideal ノ直和ダカラ $\overline{\mathfrak{J}}_1'$ ハ $\overline{\mathfrak{J}}$ ト commutative デナケレバナラナイ.

(*) $[X, Y] = 0, \quad X \in \overline{\mathfrak{J}}, \quad Y \in \overline{\mathfrak{J}}_1'$.

故ニ $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ irreducible ナ group germ ダカラ, Schur

ノ Lemma ニヨリ, $\overline{\mathfrak{J}}_1'$ ノ行列ハ全テ αE ノ形デナケレバナラナイ。ヨッテ $\overline{\mathfrak{J}}_1'$ ハ semi-simple デアリ得ナイ。之ハ矛盾デアルカラ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_1$ デナケレバナラナイ。

上ノ証明ノ仕方カラ $\overline{\mathfrak{J}}$ が irreducible 且ツ semi-simple ナレバ $\overline{\mathfrak{J}} = \widetilde{\mathfrak{J}}$ デアル。何トナレバ Lemma 2′ ニヨリ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ハ semi-simple ダカラ。ヨッテ上ノ Lemma 2 ニ於ケル $\overline{\mathfrak{G}}_1$ 及ビ $\overline{\mathfrak{G}}_2$ ハ Lie 群芽ナルノミナラズ Lie 群デアル。

次ニ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_2$ が云ヘレバ定理ノ証明ハ済ンダコトニナル。

コノ為メニ二ツノ case ニ分ケル。

Case 1. $\overline{\mathfrak{J}}_2$ ノ base $= aE$ ($\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$ ノトキハ $a=0$)。$\overline{\mathfrak{J}}_2 \neq 0$ 且ツ $\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{J}}_1$ トセヨ。然ラバ, Lemma 2′ ニヨリ, 群芽 $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ Lie 群 $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ノ単位ノ近傍ニナル。之レハ $\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$ ヲ示スカラ不合理デアル。ヨッテ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_2$。

Case 2. $\overline{\mathfrak{J}}_2$ ノ base $= E$ 及ビ $\sqrt{-1}\,E$. E モ $\sqrt{-1}\,E$ モ $\overline{\mathfrak{J}}$ ニ属サズトスレバ上ノ如クシテ $\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$. 次ニ E 又ハ $\sqrt{-1}\,E$ ノ何レカ一方ノミが $\overline{\mathfrak{J}}$ ニ属スルトセヨ。之レヲ E トスル。然ラバ E ハ全テノ行列ト可換ダカラ定義ニヨリ, $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ任意ノ行列ハ

$$A_1 A_2 \cdots\cdots A_k Y \begin{cases} A_i \in (\overline{\mathfrak{G}} \text{ ト } \overline{\mathfrak{G}}_1 \text{ トノ共通集合}) \\ Y = \exp(tE),\ t \text{ real} \end{cases}$$

ノ形又ハ斯ル形ノ行列ノ極限デアル。ヨッテ $X \in \widetilde{\mathfrak{G}}$ ニ対シテ $\det(X) = \exp(t)$, t real, デアル。故ニ $\sqrt{-1}\,E$ ハ

$\widetilde{\mathfrak{J}}$ ニ属シ得ナイ。之レハ不合理ダカラ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}_2}$ デナケレバナラナイ。

故ニ $\overline{\mathfrak{J}} = \widetilde{\mathfrak{J}}$ デナケレバナラナイ。 ——以上——